3/12/2020

Εξαγωγή (derivation) της θεμελιώδους λύσης της εξίσωσης θερμότητας $\boxed{u_t - \Delta u = 0 \text{ στον } \mathbb{R}^n}$ (1)

<u>Παρατήρηση</u> Αφού <u>μία</u> διαφόριση ως προς τον χρόνο t = <u>δύο</u> διαφορίσεις ως προς τον χώρο x.

Προκύπτει (ισχυρισμός) ότι αν η $u(x,t)$ επιλύει την (1) θα την επιλύει και η $u(\lambda x, \lambda^2 t) =: \tilde{u}(x,t)$ $\forall \lambda > 0$. [$\partial_t \tilde{u} = \lambda^2 u_t$, $\partial_{x_i} \tilde{u} = \lambda u_{x_i}$, $\partial^2_{x_i} \tilde{u} = \lambda^2 u_{x_i x_i}$
$\Delta \tilde{u} = \lambda^2 \Delta u \Rightarrow \partial_t \tilde{u} - \Delta \tilde{u} = \lambda^2 (u_t - \Delta u) = 0$]

$u(\underbrace{\lambda x}_{=\text{ scaling του χώρου}}, \overbrace{\lambda^2 t}^{=\text{ scaling του χρόνου}}) = \tilde{u}(x,t)$

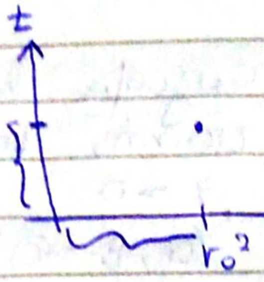
(κλιμάκωση = καθορισμός κλίμακας (= scale))

[στην κλίμακα την «κανονική» του x, όταν είμαι στο $x = 1$ στη «νέα κλίμακα» $y = \lambda x$ είμαι στο $y = \lambda$, ή αλλιώς για να είμαι στην νέα κλίμακα $y = 1$, θα πρέπει στην παλιά να είμαι στο $x = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow$ αν

$\lambda = \varepsilon << 1$, τότε θα πρέπει να προχωρήσω πολύ $x = \frac{1}{\varepsilon} >> 1$ [π.χ. σε μέτρα] για να προχωρήσω κατά $y = 1$ [π.χ. σε έτη φωτός]]

Το scaling $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ συνεπάγεται μία αναλογία $\frac{r^2}{t}$ $(r = |x|)$ για την εξ. θερμότητας

Πιο κατανοητά: Η αρμόζουσα αναλογία μεταξύ της κλίμακας με την οποία μετράω τον χώρο και τον χρόνο είναι $\frac{r^2}{t}$



δηλαδή να ισχύει μία μονάδα μέτρησης στον χρόνο = (μονάδα μέτρησης στον χώρο)^2

Απλώς, : $u(\lambda x, \lambda^2 t) =: \hat{u}(\underbrace{\lambda r}_{=1}, \underbrace{\lambda^2 t}_{=1})$

$\Longrightarrow \lambda r = \lambda^2 t \Longrightarrow \dfrac{r}{t} = \lambda \Longrightarrow \left(\dfrac{r}{t}\right) \cdot r = \left(\dfrac{r}{t}\right)^2 \cdot t$

$\Longrightarrow$ εάν θέλουμε μία όσο γίνεται πιο απλή λύση της (1), θα μπορούσαμε να ψάξουμε για λύσεις της μορφής $u(x,t) = v\left(\dfrac{r^2}{t}\right)$

[Problem 13, Evans].

Εδώ θα αναζητήσουμε λύσεις της μορφής $u(x,t) = \dfrac{1}{t^\alpha} v\left(\dfrac{x}{t^\beta}\right)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$

[Κίνητρο: βασική ιδέα του scaling: ένας νόμος της φυσικής να είναι αναλλοίωτος (invariant) κάτω από διαφορετικές κλίμακες (δηλ. μονάδες μέτρησης): Στην περίπτωση εδώ: (1) $u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0$ τρεις κλίμακες με τις οποίες μετράμε τον χώρο x, τον χώρο t, το μέγεθος u.

Άρα, θα θέλαμε αν η $u(x,t)$ επιλύει την (1) να ισχύει $u(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)$, (2) $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall t > 0$. [ουσιαστικά: θέλουμε η εξίσωση θερμότητας - ως σχέση μεταξύ διαφόρων μεγεθών - να ισχύει ανεξάρτητα από τον τρόπο (κλίμακα) με τον οποίο μετράω αυτά τα μεγέθη]

Από το (2) $u(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)$, θέτοντας $\lambda = \dfrac{1}{t}$ προκύπτει $u(x,t) = \dfrac{1}{t^\alpha} \underbrace{u\left(\dfrac{x}{t^\beta}, 1\right)}_{=: v\left(\frac{x}{t^\beta}\right)}$]

Άρα, συνεχίζουμε με το να ψάχνουμε λύσεις της (1) $u_t - \Delta u = 0$ της ειδικής μορφής

(4) $u(x,t) = \frac{1}{t^{\alpha}} v\Big(\underbrace{\frac{x}{t^{\beta}}}_{:=y}\Big)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$

$(\alpha, \beta > 0)$

(4) στο (1): $\underbrace{-\alpha \frac{1}{t^{\alpha+1}} v(y) + \frac{1}{t^{\alpha}} Dv(y) \cdot \underbrace{\frac{x}{t^{\beta+1}}(-\beta)}_{= y\left(\frac{-\beta}{t}\right)}}_{= u_t(x,t)}$

$\frac{1}{t^{\alpha}} Dv(y) \cdot y\left(\frac{-\beta}{t}\right) = -\beta \cdot \frac{1}{t^{\alpha+1}} Dv(y) \cdot y$

$u(x,t) = \frac{1}{t^{\alpha}} v\Big(\underbrace{\frac{x}{t^{\beta}}}_{= y}\Big) \implies$

$\partial_{x_i} u = \frac{1}{t^{\alpha}} \partial_{y_i} v(y) \frac{1}{t^{\beta}} \implies \partial^2_{x_i} u = \frac{1}{t^{\alpha}} \cdot \partial^2_{y_i} v(y) \cdot \frac{1}{t^{2\beta}}$

$\implies \Delta_x u = \frac{1}{t^{\alpha+2\beta}} \Delta v(y)$

Άρα, αφού $u_t - \Delta u = 0$ (1) έχουμε για $u(x,t) = \frac{1}{t^{\alpha}} v\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right)$.

$\alpha \frac{1}{t^{\alpha+1}} v(y) + \beta \frac{1}{t^{\alpha+1}} Dv(y) \cdot y + \frac{1}{t^{\alpha+2\beta}} \Delta v(y) = 0$

Για να πάρουμε μία εξίσωση που εξαρτάται μόνο από το y [αφού θέλουμε να βρούμε το v].

Θέτουμε $\alpha + 1 = \alpha + 2\beta \iff \beta = \frac{1}{2}$

Άρα, $\beta = \frac{1}{2}$ και έχουμε:

$$(6)\ a v(y) + \frac{1}{2} y \cdot \underbrace{Dv(y)}_{\in \mathbb{R}^n} + \Delta v(y) = 0$$

Για περαιτέρω απλούστευση: Έστω

$v(y) = w(|y|) = w(r)$

Τότε $Dv(y) = w'(|y|) \cdot \frac{y}{|y|} \Rightarrow$

$$\operatorname{div} Dv(y) = \Delta v(y) = D \cdot Dv(y) = D \cdot \underbrace{\Big(\underbrace{w'(|y|)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\frac{y}{|y|}}_{\in \mathbb{R}^n}\Big)}_{\in \mathbb{R}} =$$

$$= D(w'(|y|)) \cdot \frac{y}{|y|} + w'(|y|) D \cdot \frac{y}{|y|}, \text{ όπου } D(w'(|y|)) =$$

$$w''(|y|) \cdot \frac{y}{|y|} \text{ και } D \cdot \frac{y}{|y|} = D\Big(\underbrace{\frac{1}{|y|}}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{y}_{\in \mathbb{R}^n}\Big)$$

$$= \underbrace{D\left(\frac{1}{|y|}\right)} \cdot y + \frac{1}{|y|} \cdot \underbrace{Dy}$$

$$= (\partial y_1, \dots, \partial y_n)(y_1, \dots, y_n)$$

$$= D(|y|^{-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\partial y_i \cdot y_i}_{=1} = n.$$

$$= -\frac{1}{|y|^2} D|y| = -\frac{1}{|y|^2} \cdot \frac{y}{|y|}$$

$$\Rightarrow D \cdot \frac{y}{|y|} = -\frac{1}{|y|} + n \cdot \frac{1}{|y|} = (n-1) \cdot \frac{1}{|y|}$$

$$\Rightarrow \Delta v(y) = w''(|y|) + w'(|y|) \cdot \frac{n-1}{|y|}$$

$\Longrightarrow$ η (6) ισοδυναμεί με $a\omega(|y|) + \frac{1}{2}|y|\,\omega'(|y|) +$

$\omega''(|y|) + \omega'(|y|)\cdot\frac{n-1}{|y|} = 0$

Θέτω $|y| = r$

Άρα, (6) $\Longleftrightarrow$ $a\omega(r) + \frac{1}{2} r\cdot\omega'(r) + \omega''(r) + \frac{n-1}{r}\omega'(r)$,

$r > 0$

(6) $\Longleftrightarrow$ $u_t - \Delta u = 0$, με $u(x,t) = \frac{1}{t^a} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right)$

όπου $v(y) = \omega(|y|)$

και $\beta = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\omega = r$ (plasibility arguments, heuristics)

Περαιτέρω απλοποίηση: $a = \frac{n}{2}$

Τότε (6') $\Longleftrightarrow$ $r^{n-1}\left(\frac{n}{2}\omega + \frac{1}{2}r\omega' + \omega'' + \frac{n-1}{r}\omega'\right) = 0$

$\Longleftrightarrow (r^{n-1}\cdot\omega')' + \frac{1}{r}(r^n\cdot\omega)' = 0$

$= (n-1)\cdot r^{n-2}\omega' + r^{n-1}\omega'' + \frac{1}{2}n\cdot r^{n-1}\omega + \frac{1}{2}r^n\omega'$

$\Longleftrightarrow r^{n-1}\left(\omega' + \frac{1}{2}r\omega\right) \overset{*}{=} \text{const.}$ (σταθερά)

(*) Απαιτώντας $\lim_{r\to\infty}(r^n\omega) = 0 = \lim_{r\to\infty} r^{n-1}\omega'$ [δηλ. θέλαμε για $|y| \to \infty$ τα $|y|\omega$, ω' να μηδενίζονται αρκετά γρήγορα.]

$\Longrightarrow \omega'(r) = -\frac{1}{2}r\cdot\omega(r)$, $r > 0$ $\Longrightarrow$

$w(r) = b \cdot e^{-r^2/4}$

$$\left[\int \frac{w'}{w} = \int -\frac{1}{2} r \Rightarrow \ln \frac{|w(r)|}{|b|} = -\frac{r^2}{4} \Rightarrow \right.$$

$$\left. w(r) = b \cdot e^{-r^2/4} \right].$$

και όλα μαζί δίνουν $u(x,t) = \frac{1}{t^a} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) =$

$$\frac{1}{t^a} w\left(\frac{|x|}{t^\beta}\right) = \frac{1}{t^{n/2}} \cdot b \cdot e^{-(|x|/t^{1/2})^2/4}$$

$a = \frac{n}{2}$

$\beta = \frac{1}{2}$

$w(r) = b \cdot e^{-r^2/4}$

$$= b \cdot \frac{1}{t^{n/2}} e^{-|x|^2/4t}$$

αυτή ~~η σχέση~~ είναι ~~ακαλύπτη~~ (και εξαρτάται από την διάσταση)

→ η μόνη σταθερά που είναι ελεύθερη.

Επιλέγοντας, (βλ. πιο κάτω - μάλλον στον Evans: κανονικοποίηση) $b = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}}$

ορίζουμε ως τη θεμελιώδη λύση της εξ. θερμότητας $u_t - \Delta u = 0$ στον $\mathbb{R}^n$ την συνάρτηση:

$$\phi(x,t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & , x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0 & , x \in \mathbb{R}^n, t < 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε: 1) $\forall x \neq 0$: $\lim_{t \to 0^+} \phi(x,t) = 0$ [και

$\lim_{t \to 0^+} \partial_t^k \phi(x,t) = 0 \quad , \forall k \in \mathbb{N}$]

2) $\phi(t,x) \geq 0$
3) $\phi(0,t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} +\infty$ (ιδιομορφία στο $(0,0)$)

4) $\phi(x,t) = \tilde{\phi}(|x|,t)$

Για τα επόμενα βλέπε κυρίως Evans σελ. 46 και επόμενες. Εδώ μόνο σχόλια.

- $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx \; = \; \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|} dz \cdot (4t)^{n/2}$

$z = \frac{x}{2t^{1/2}}$

$\Rightarrow |z| = \frac{|x|}{4t}$

$Dz = \frac{I}{2t^{1/2}} \Rightarrow \det Dz = \frac{1}{(2t^{1/2})^n} = \frac{1}{2^n \cdot t^{n/2}}$

$= \frac{1}{(4t)^{n/2}}$

- $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

- $\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\phi(x,t)}_{\text{πυκνότητα κατανομής πιθανότητας}} dt = 1, \; \forall t>0$ [για $t=0$: ιδιομορφία στο $x=0$]

Θέλουμε να λύσουμε $\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \; \forall x \in \mathbb{R}^n, t>0 \\ u(x,0) = g(x), \; \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$

Παρατηρούμε $\forall t>0$:
$(\partial t - \Delta)\,\phi(x,t) = 0 \quad , \; \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\Longrightarrow (\partial t - \Delta_x)\cdot \phi(x-y,t) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ (\forall y \in \mathbb{R}^n)$

$\Longrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^n : (\partial t - \Delta x) g(y)\cdot \phi(x-y,t) = 0$

$\Longrightarrow$ για οσοδήποτε πολλά $y_i \in \mathbb{R}^n$:

$$(\partial t - \Delta x)\sum_{i=1} g(y_i)\cdot \phi(x-y_i,t) = 0$$

αθρ. Riemann $\Longrightarrow$ «ιδεατά»: $(\partial t - \Delta x)\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\phi(x-y,t)dy$

$= 0$

- Δείξαμε (Th. 1, p.47, Evans).

$g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y,t)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t>0$$

$\Longrightarrow$ i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$

ii) $u_t - \Delta u = 0$ στο $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$

iii) $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x^0,0) \\ x\in\mathbb{R}^n,\, t>0}} u(x,t) = g(x^0), \quad \forall x^0 \in \mathbb{R}^n$

[Δηλαδή το u επιλύει το ΠΑΤ στον $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(\cdot,0) = g, & \text{στο } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$